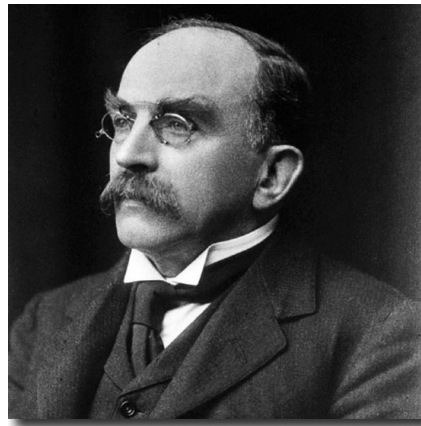


# Chapitre 10

## Matière et champs électromagnétiques



Joseph Larmor, 1857-1942

**EPFL**

## 10.1 Système électromagnétique

10.1.1 Champs d'état d'un système électromagnétique

10.1.2 Polarisation électrique et aimantation

## 10.2 Isolant et champs électromagnétiques

10.2.1 Relation constitutive électrique

10.2.2 Relation constitutive magnétique

10.2.3 Densité d'énergie interne d'un isolant

10.2.4 Energie interne d'un isolant

10.2.5 Densités d'énergie libre et d'enthalpies

10.2.6 Densités de forces

## 10.3 Conducteur et champs électromagnétiques

10.3.1 Densité d'énergie interne

10.3.2 Conducteur et champs électrostatiques

10.3.3 Condensateur plan

10.3.4 Conducteur et champs magnétostatiques

## 10.4 Conducteur et champs électromagnétiques extérieurs

10.4.1 Conducteur et champs électrostatiques extérieurs

10.4.2 Conducteur et champs magnétostatiques extérieurs

## 10.5 Applications

10.5.1 Désaimantation adiabatique

### 10.1 Système électromagnétique

10.1.1 Champs d'état d'un système électromagnétique

10.1.2 Polarisation électrique et aimantation

- **Théorie locale** : l'électromagnétisme est une théorie locale décrite en termes de champs dépendant de la position  $x$  et du temps  $t$  qui sont définis pour des systèmes locaux de volume infinitésimal centrés autour de chaque point d'espace  $x$ . A l'échelle macroscopique, le système thermodynamique est traité comme un milieu continu constitué de systèmes locaux ponctuels.
- **Champs d'état** : l'état du système est décrit par des champs vectoriels :
  - 1 Champ électrique  $E$  (champ intensif)
  - 2 Champ d'induction magnétique  $B$  (champ intensif)
  - 3 Champ de déplacement électrique  $D$  (champ densitaire)
  - 4 Champ magnétique  $H$  (champ densitaire)
  - 5 Champ de polarisation électrique  $P$  (champ densitaire)
  - 6 Champ d'aimantation  $M$  (champ densitaire)
- **Nature des champs** : les champs intensifs  $E$  et  $B$  sont des champs purement électromagnétiques et les champs densitaires  $P$  et  $M$  sont des champs purement matériels et les champs densitaires  $D$  et  $H$  décrivent les interactions entre la matière et les champs électromagnétiques.

- **Polarisation électrique** : le champ de polarisation électrique  $P$  représente une densité de dipôles électriques  $p$ . Il existe deux types de dipôles électriques :
  - 1 Dipôles permanents  $p$  en absence de champ électrique
  - 2 Dipôles induits  $p$  par le champ électrique  $E$
- **Aimantation** : le champ d'aimantation  $M$  représente une densité de dipôles magnétiques  $m$ . Il existe deux types de dipôles magnétiques (aimants) :
  - 1 Dipôles permanents  $m$  en absence de champ d'induction magnétique
  - 2 Dipôles induits  $m$  par le champ d'induction magnétique  $B$
- **Hypothèses** :
  - 1 On considère uniquement une théorie électromagnétique linéaire dans laquelle les champs densitaires  $D$  et  $H$  sont des fonctions linéaires des champs  $E$  et  $B$ .
  - 2 On considère uniquement des dipôles électriques induits  $p$  et des dipôles magnétiques induits  $m$  pour éviter les hystérèses électriques et magnétiques qui donnent lieu à des relations non-bijectives entre les champs  $P$  et  $E$  et les champs  $M$  et  $H$ .

### 10.2 Isolant et champs électromagnétiques

- 10.2.1 Relation constitutive électrique
- 10.2.2 Relation constitutive magnétique
- 10.2.3 Densité d'énergie interne d'un isolant
- 10.2.4 Energie interne d'un isolant
- 10.2.5 Densités d'énergie libre et d'enthalpies
- 10.2.6 Densités de forces

- **Polarisation électrique induite** : par le champ électrique  $\mathbf{E}$  dans la matière.

$$\mathbf{P} = \varepsilon_0 \boldsymbol{\chi}_e \cdot \mathbf{E} \quad (10.1)$$

où  $\boldsymbol{\chi}_e$  est le tenseur de susceptibilité électrique de la matière et  $\varepsilon_0$  est la permittivité électrique du vide. Ainsi, la polarisation électrique induite  $\mathbf{P}$  n'est pas nécessairement colinéaire au champ électrique  $\mathbf{E}$  qui l'induit, cela dépend des propriétés de la matière.

- **Relation constitutive électrique** : entre les champs  $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{P}$

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} = \varepsilon_0 (\mathbb{1} + \boldsymbol{\chi}_e) \cdot \mathbf{E} \quad (10.3)$$

- 1 Le champ  $\mathbf{D}$  est la densité totale de dipôles électriques induits dans la matière et le vide.
- 2 Le champ  $\varepsilon_0 \mathbf{E}$  est la densité de dipôles électriques induits par le champ électrique  $\mathbf{E}$  dans le vide.
- 3 Le champ  $\mathbf{P} = \varepsilon_0 \boldsymbol{\chi}_e \cdot \mathbf{E}$  est la densité de dipôles électriques induits par le champ électrique  $\mathbf{E}$  dans la matière.



- **Aimantation induite** : par le champ d'induction magnétique  $\mathbf{B}$  dans la matière.

$$\mathbf{M} = \mu_0^{-1} \chi_m \cdot \mathbf{B} \quad (10.2)$$

où  $\chi_m$  est le tenseur de susceptibilité magnétique de la matière et  $\mu_0$  est la perméabilité magnétique du vide. Ainsi, l'aimantation induite  $\mathbf{M}$  n'est pas nécessairement colinéaire au champ d'induction magnétique  $\mathbf{B}$ , cela dépend des propriétés de la matière.

- **Relation constitutive magnétique** : entre les champs  $\mathbf{H}$ ,  $\mathbf{B}$  et  $\mathbf{M}$

$$-\mathbf{H} = -\mu_0^{-1} \mathbf{B} + \mathbf{M} = -\mu_0^{-1} (\mathbb{1} - \chi_m) \cdot \mathbf{B} \quad (10.4)$$

- 1 Le champ  $-\mathbf{H}$  est la densité totale de dipôles magnétiques induits dans la matière et le vide.
- 2 Le champ  $-\mu_0^{-1} \mathbf{B}$  est la densité de dipôles magnétiques induits par le champ d'induction magnétique  $\mathbf{B}$  dans le vide.
- 3 Le champ  $\mathbf{M} = \mu_0^{-1} \chi_m \cdot \mathbf{B}$  est la densité de dipôles magnétiques induits par le champ d'induction magnétique  $\mathbf{B}$  dans la matière.

- **Isolant** : les champs d'état d'un isolant constitué de  $r$  substances chimiques  $A$  avec des dipôles électriques induits  $p$  et des dipôles magnétiques induits  $m$  sont les suivants :
  - 1 Densité d'entropie  $s$
  - 2 Densités  $n_A$  de substances chimiques  $A = 1, \dots, r$
  - 3 Polarisation électrique  $P$
  - 4 Aimantation  $M$
- **Matière et champs électromagnétiques** : les champs d'état d'un système matériel constitué de  $r$  substances chimiques  $A$  avec des champs électromagnétiques sont les suivants :
  - 1 Densité d'entropie  $s$
  - 2 Densités  $n_A$  de substances chimiques  $A = 1, \dots, r$
  - 3 Champ de déplacement électrique  $D$
  - 4 Champ d'induction magnétique  $B$

- **Choix des champs d'état** : le choix des champs  $D$  et  $B$  comme champs d'état d'un système matériel avec des champs électromagnétiques est dû au fait qu'il n'y a pas besoin de fournir d'énergie au système pour maintenir fixe une distribution de charges électriques, qui est liée au champ  $D$  par l'équation de Gauss. En revanche, il faut fournir de l'énergie pour maintenir fixe une distribution de courants électriques, qui est liée au champ  $H$  par l'équation d'Ampère. Par conséquent, on peut adopter  $D$  comme champ d'état électrique, mais on doit choisir  $B$ , qui est le champ conjugué au champ  $H$ , comme champ d'état magnétique.
- **Champs électromagnétiques** : les champs d'état d'un système constitué de champs électromagnétiques dans le vide sont les suivants :
  - 1 Champ électrique  $E$
  - 2 Champ d'induction magnétique  $B$

- **Densité d'énergie interne** : matière et champs électromagnétiques

$$u^{\text{tot}}(s, \{n_A\}, \mathbf{D}, \mathbf{B}) = Ts + \sum_{A=1}^r \mu_A n_A + \frac{1}{2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \frac{1}{2} \mathbf{H} \cdot \mathbf{B} \quad (10.5)$$

- ❶ Densité d'énergie thermique (matière)  $Ts$
- ❷ Densité d'énergie chimique (matière)  $\sum_{A=1}^r \mu_A n_A$
- ❸ Densité d'énergie électrique (matière et vide)  $\frac{1}{2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{D}$
- ❹ Densité d'énergie magnétique (matière et vide)  $\frac{1}{2} \mathbf{H} \cdot \mathbf{B}$

- **Densité d'énergie interne** : champs électromagnétiques dans le vide

$$u^{\text{em}}(\mathbf{E}, \mathbf{B}) = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \mathbf{E}^2 + \frac{1}{2} \frac{\mathbf{B}^2}{\mu_0} \quad (10.6)$$

- ❶ Densité d'énergie électrique (vide)  $\frac{1}{2} \varepsilon_0 \mathbf{E}^2$
- ❷ Densité d'énergie magnétique (vide)  $\frac{1}{2} \frac{\mathbf{B}^2}{\mu_0}$

- **Densité d'enthalpie magnétique** : isolant

$$h_m(s, \{n_A\}, P, B) = u^{\text{tot}}(s, \{n_A\}, D, B) - u^{\text{em}}(E, B) \quad (10.7)$$

- **Densité d'enthalpie magnétique** : (10.5) et (10.6) dans (10.7)

$$h_m(s, \{n_A\}, P, B) = Ts + \sum_{A=1}^r \mu_A n_A + \frac{1}{2} P \cdot E - \frac{1}{2} M \cdot B \quad (10.8)$$

- **Densité d'énergie interne** : transformée de Legendre de  $h_m(s, \{n_A\}, P, B)$  par rapport à  $B$  :

$$u(s, \{n_A\}, P, M) = h_m(s, \{n_A\}, P, B) - \frac{\partial h_m}{\partial B} \cdot B \quad (10.9)$$

- **Dérivée partielle** : de  $h_m$  (10.8) donne (10.11)

$$\frac{\partial h_m}{\partial B} = - \frac{\partial}{\partial B} \left( \frac{1}{2} M \cdot B \right) = - \frac{\partial}{\partial B} \left( \frac{1}{2} \mu_0^{-1} \chi_m \cdot B^2 \right) = - M$$

- **Densité d'énergie interne** : (10.8) et (10.11) dans (10.9)

$$u(s, \{n_A\}, P, M) = Ts + \sum_{A=1}^r \mu_A n_A + \frac{1}{2} P \cdot E + \frac{1}{2} M \cdot B \quad (10.12)$$

- **Différentielle de la densité d'énergie interne** : (10.12) donne (10.13)

$$du(s, \{n_A\}, \mathbf{P}, \mathbf{M}) = \frac{\partial u}{\partial s} ds + \sum_{A=1}^r \frac{\partial u}{\partial n_A} dn_A + \frac{\partial u}{\partial \mathbf{P}} \cdot d\mathbf{P} + \frac{\partial u}{\partial \mathbf{M}} \cdot d\mathbf{M}$$

- **Champs intensifs** : température  $T$ , potentiel chimique  $\mu_A$ , champ électrique  $\mathbf{E}$  et champ d'induction magnétique  $\mathbf{B}$

$$T = \frac{\partial u}{\partial s} \quad \mu_A = \frac{\partial u}{\partial n_A} \quad \mathbf{E} = \frac{\partial u}{\partial \mathbf{P}} \quad \mathbf{B} = \frac{\partial u}{\partial \mathbf{M}} \quad (10.14)$$

- **Différentielle de la densité d'énergie interne** : (10.14) dans (10.13)

$$du(s, \{n_A\}, \mathbf{P}, \mathbf{M}) = T ds + \sum_{A=1}^r \mu_A dn_A + \mathbf{E} \cdot d\mathbf{P} + \mathbf{B} \cdot d\mathbf{M} \quad (10.15)$$

- **Différentiation de l'énergie interne** : (10.12)

$$\begin{aligned} du(s, \{n_A\}, \mathbf{P}, \mathbf{M}) = T ds + s dT + \sum_{A=1}^r (\mu_A dn_A + n_A d\mu_A) \\ + \mathbf{P} \cdot d\mathbf{E} + \mathbf{E} \cdot d\mathbf{P} + \mathbf{B} \cdot d\mathbf{M} + \mathbf{M} \cdot d\mathbf{B} \end{aligned} \quad (10.16)$$

- **Relation de Gibbs-Duhem** : (10.16) - (10.15)

$$s dT + \sum_{A=1}^r n_A d\mu_A + \mathbf{P} \cdot d\mathbf{E} + \mathbf{M} \cdot d\mathbf{B} = 0 \quad (10.17)$$

- **Variables d'état extensives** : isolant homogène et uniforme (10.18)

$$S = \int_V dV s \quad N_A = \int_V dV n_A \quad \mathbf{p} = \int_V dV \mathbf{P} \quad \mathbf{m} = \int_V dV \mathbf{M}$$

- **Energie interne** : isolant homogène et uniforme

$$U(S, \{N_A\}, \mathbf{p}, \mathbf{m}) = \int_V dV u(s, \{n_A\}, \mathbf{P}, \mathbf{M}) \quad (10.19)$$

- **Intégrale de la densité d'énergie interne** : (10.12) sur le volume

$$\begin{aligned} \int_V dV u(s, \{n_A\}, \mathbf{P}, \mathbf{M}) &= T \int_V dV s + \sum_{A=1}^r \mu_A \int_V dV n_A \\ &\quad + \frac{1}{2} \left( \int_V dV \mathbf{P} \right) \cdot \mathbf{E} + \frac{1}{2} \left( \int_V dV \mathbf{M} \right) \cdot \mathbf{B} \end{aligned} \quad (10.20)$$

- **Energie interne** : isolant homogène et uniforme (10.18) - (10.20)

$$U(S, \{N_A\}, \mathbf{p}, \mathbf{m}) = TS + \sum_{A=1}^r \mu_A N_A + \frac{1}{2} \mathbf{p} \cdot \mathbf{E} + \frac{1}{2} \mathbf{m} \cdot \mathbf{B} \quad (10.21)$$

- ① Energie thermique  $TS$
- ② Energie chimique  $\sum_{A=1}^r \mu_A N_A$
- ③ Energie électrique des dipôles induits  $\frac{1}{2} \mathbf{p} \cdot \mathbf{E}$
- ④ Energie magnétique des dipôles induits  $\frac{1}{2} \mathbf{m} \cdot \mathbf{B}$



- **Densités de potentiels thermodynamiques** : les densités de potentiels thermodynamiques sont obtenues à partir de la densité d'énergie interne  $u(s, \{n_A\}, \mathbf{P}, \mathbf{M})$  par différentes transformations de Legendre des champs d'état  $s$ ,  $\mathbf{P}$  et  $\mathbf{M}$ .
- **Densité d'énergie libre** : transformée de Legendre de  $u$

$$\begin{aligned}
 f(T, \{n_A\}, \mathbf{P}, \mathbf{M}) &= u - \frac{\partial u}{\partial s} s = u - Ts \\
 &= \sum_{A=1}^r \mu_A n_A + \frac{1}{2} \mathbf{P} \cdot \mathbf{E} + \frac{1}{2} \mathbf{M} \cdot \mathbf{B}
 \end{aligned}
 \tag{10.22}$$

- **Différentielle de la densité d'énergie libre** : (10.22)

$$df(T, \{n_A\}, \mathbf{P}, \mathbf{M}) = -s dT + \sum_{A=1}^r \mu_A dn_A + \mathbf{E} \cdot d\mathbf{P} + \mathbf{B} \cdot d\mathbf{M} \tag{10.23}$$

- **Densité d'enthalpie électrique** : transformée de Legendre de  $u$

$$\begin{aligned}
 h_e(s, \{n_A\}, \mathbf{E}, \mathbf{M}) &= u - \frac{\partial u}{\partial \mathbf{P}} \cdot \mathbf{P} = u - \mathbf{E} \cdot \mathbf{P} \\
 &= Ts + \sum_{A=1}^r \mu_A n_A - \frac{1}{2} \mathbf{P} \cdot \mathbf{E} + \frac{1}{2} \mathbf{M} \cdot \mathbf{B}
 \end{aligned} \quad (10.24)$$

- **Différentielle de la densité d'enthalpie électrique** : (10.24)

$$dh_e(s, \{n_A\}, \mathbf{E}, \mathbf{M}) = T ds + \sum_{A=1}^r \mu_A dn_A - \mathbf{P} \cdot d\mathbf{E} + \mathbf{B} \cdot d\mathbf{M} \quad (10.25)$$

- **Densité d'enthalpie magnétique** : transformée de Legendre de  $u$

$$\begin{aligned}
 h_m(s, \{n_A\}, \mathbf{P}, \mathbf{B}) &= u - \frac{\partial u}{\partial \mathbf{M}} \cdot \mathbf{M} = u - \mathbf{B} \cdot \mathbf{M} \\
 &= Ts + \sum_{A=1}^r \mu_A n_A + \frac{1}{2} \mathbf{P} \cdot \mathbf{E} - \frac{1}{2} \mathbf{M} \cdot \mathbf{B}
 \end{aligned} \quad (10.26)$$

- **Différentielle de la densité d'enthalpie magnétique** : (10.26)

$$dh_m(s, \{n_A\}, \mathbf{P}, \mathbf{B}) = T ds + \sum_{A=1}^r \mu_A dn_A + \mathbf{E} \cdot d\mathbf{P} - \mathbf{M} \cdot d\mathbf{B} \quad (10.27)$$

- **Densité d'enthalpie électrique libre** : transformée de Legendre de  $h_e$

$$\begin{aligned}
 g_e(T, \{n_A\}, \mathbf{E}, \mathbf{M}) &= h_e - \frac{\partial h_e}{\partial s} s = h_e - T s \\
 &= \sum_{A=1}^r \mu_A n_A - \frac{1}{2} \mathbf{P} \cdot \mathbf{E} + \frac{1}{2} \mathbf{M} \cdot \mathbf{B}
 \end{aligned}
 \tag{10.28}$$

- **Différentielle de la densité d'enthalpie électrique libre** : (10.28)

$$dg_e(T, \{n_A\}, \mathbf{E}, \mathbf{M}) = -s dT + \sum_{A=1}^r \mu_A dn_A - \mathbf{P} \cdot d\mathbf{E} + \mathbf{B} \cdot d\mathbf{M} \tag{10.29}$$

- **Densité d'enthalpie magnétique libre** : transf. de Legendre de  $h_m$

$$\begin{aligned}
 g_m(T, \{n_A\}, \mathbf{P}, \mathbf{B}) &= h_m - \frac{\partial h_m}{\partial s} s = h_m - T s \\
 &= \sum_{A=1}^r \mu_A n_A + \frac{1}{2} \mathbf{P} \cdot \mathbf{E} - \frac{1}{2} \mathbf{M} \cdot \mathbf{B}
 \end{aligned}
 \tag{10.30}$$

- **Différentielle de la densité d'enthalpie magnétique libre** : (10.30)

$$dg_m(T, \{n_A\}, \mathbf{P}, \mathbf{B}) = -s dT + \sum_{A=1}^r \mu_A dn_A + \mathbf{E} \cdot d\mathbf{P} - \mathbf{M} \cdot d\mathbf{B} \tag{10.31}$$

- **Analogie** : en mécanique, une densité de force conservative est définie comme l'opposé du gradient de la densité d'énergie potentielle. En thermodynamique, une densité de force est définie comme l'opposé du gradient de la densité du potentiel thermodynamique.

- **Gradient d'enthalpie électrique** : (10.25)

$$\nabla h_e(\mathbf{E}) = \frac{\partial h_e}{\partial \mathbf{E}} \nabla \mathbf{E} = -\mathbf{P} \nabla \mathbf{E} \quad (10.32)$$

- **Densité de force de polarisation électrique** : exercée sur un isolant de polarisation électrique  $\mathbf{P}$  par un champ électrique inhomogène  $\mathbf{E}$

$$\mathbf{f}_p(\mathbf{E}) = -\nabla h_e(\mathbf{E}) = \mathbf{P} \nabla \mathbf{E} \quad (10.33)$$

- **Produit scalaire** : composantes cartésiennes

$$\mathbf{P} \nabla \mathbf{E} = P_x \nabla E_x + P_y \nabla E_y + P_z \nabla E_z$$

- **Force de polarisation électrique** : exercée sur un isolant de polarisation électrique  $\mathbf{P}$  par un champ électrique inhomogène  $\mathbf{E}$

$$\mathbf{F}_p(\mathbf{E}) = \int_V dV \mathbf{f}_p(\mathbf{E}) = \int_V dV (\mathbf{P} \nabla \mathbf{E}) \quad (10.34)$$

- **Gradient d'enthalpie magnétique :** (10.27)

$$\nabla h_m(B) = \frac{\partial h_m}{\partial B} \nabla B = -M \nabla B \quad (10.35)$$

- **Densité de force d'aimantation :** exercée sur un isolant d'aimantation  $M$  par un champ d'induction magnétique inhomogène  $B$

$$f_m(B) = -\nabla h_m(B) = M \nabla B \quad (10.36)$$

- **Produit scalaire :** composantes cartésiennes

$$M \nabla B = M_x \nabla B_x + M_y \nabla B_y + M_z \nabla B_z$$

- **Force d'aimantation :** exercée sur un isolant d'aimantation  $M$  par un champ d'induction magnétique inhomogène  $B$

$$F_m(B) = \int_V dV f_m(B) = \int_V dV (M \nabla B) \quad (10.37)$$

### 10.3 Conducteur et champs électromagnétiques

10.3.1 Densité d'énergie interne

10.3.2 Conducteur et champs électrostatiques

10.3.3 Condensateur plan

10.3.4 Conducteur et champs magnétostatiques

- **Conducteur** : les champs d'état d'un conducteur constitué de  $r$  substances chimiques  $A$  électriquement chargées sont les suivants :

- 1 Densité d'entropie  $s$
- 2 Densités  $n_A$  de substances chimiques  $A = 1, \dots, r$
- 3 Champ de déplacement électrique  $D$
- 4 Champ d'induction magnétique  $B$

- **Relation constitutive électrique** : (10.3)

$$D = \varepsilon_0 (\mathbb{1} + \chi_e) \cdot E = \varepsilon \cdot E \quad (10.38)$$

- **Tenseur de permittivité électrique** :

$$\varepsilon = \varepsilon_0 (\mathbb{1} + \chi_e) \quad (10.39)$$

- **Relation constitutive magnétique** : (10.4)

$$H = \mu_0^{-1} (\mathbb{1} - \chi_m) \cdot B = \mu^{-1} \cdot B \quad (10.40)$$

- **Tenseur de perméabilité magnétique** :

$$\mu^{-1} = \mu_0^{-1} (\mathbb{1} - \chi_m) \quad (10.41)$$

- **Conducteur** : homogène et isotrope

$$\varepsilon = \varepsilon \mathbb{1} \quad \text{et} \quad \mu^{-1} = \mu^{-1} \mathbb{1}$$

- **Relation constitutive électrique** : homogène et isotrope (10.36)

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} \quad (10.42)$$

- **Relation constitutive magnétique** : homogène et isotrope (10.40)

$$\mathbf{H} = \mu^{-1} \mathbf{B} \quad (10.43)$$

- **Champs intensifs** : conjugués aux champs densitaires

$$\mathbf{E} = \frac{\partial u}{\partial \mathbf{D}} \quad \text{et} \quad \mathbf{H} = \frac{\partial u}{\partial \mathbf{B}} \quad (10.45)$$

- **Différentielle de la densité d'énergie interne** :

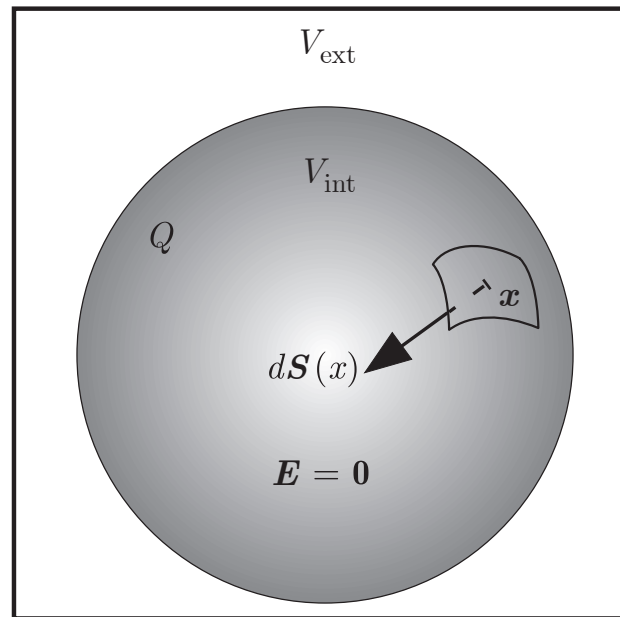
$$du(s, \{n_A\}, \mathbf{D}, \mathbf{B}) = T ds + \sum_{A=1}^r \mu_A dn_A + \mathbf{E} \cdot d\mathbf{D} + \mathbf{H} \cdot d\mathbf{B} \quad (10.44)$$

- **Densité d'énergie interne** :

$$u(s, \{n_A\}, \mathbf{D}, \mathbf{B}) = Ts + \sum_{A=1}^r \mu_A n_A + \frac{D^2}{2\varepsilon} + \frac{B^2}{2\mu} \quad (10.46)$$



- **Conducteur** : homogène et isotrope de charge électrique  $Q$  et de volume  $V_{\text{int}}$  dans une enceinte à vide isolée de volume  $V = V_{\text{int}} + V_{\text{ext}}$ .
- **Hypothèse** : le volume  $V_{\text{ext}}$  extérieur au conducteur est suffisamment grand par rapport au volume intérieur  $V_{\text{int}}$  pour que le potentiel électrostatique  $\varphi$  soit négligeable sur les parois.



- **Intégration** : l'intégrale sur le volume extérieur au conducteur  $V_{\text{ext}}$  donne lieu à une intégrale de surface exprimée en termes de l'élément de surface infinitésimal  $dS$  qui est défini positif lorsqu'il est orienté vers l'intérieur du conducteur au point  $x$ .

- **Electrostatique** : les constituants élémentaires du conducteur électrique sont immobiles dans le référentiel de l'enceinte, ce qui implique que les charges électriques sont fixes et qu'il n'y a pas de courant électrique. Par conséquent, le système ne génère pas de champ d'induction magnétique.
- **Densité d'énergie interne** : électrostatique d'un conducteur

$$u(s, \{n_A\}, \mathbf{D}) = Ts + \sum_{A=1}^r \mu_A n_A + \frac{\mathbf{D}^2}{2\varepsilon} \quad (10.47)$$

- **Relation constitutive électrique** : homogène et isotrope

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} \quad (10.42)$$

- **Densité d'énergie interne** : (10.42) dans (10.47)

$$u(s, \{n_A\}, \mathbf{D}) = Ts + \sum_{A=1}^r \mu_A n_A + \frac{1}{2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} \quad (10.48)$$

- **Champ électrique** : opposé du gradient de potentiel électrostatique

$$\mathbf{E} = -\nabla \varphi \quad (10.49)$$

- **Densité d'énergie électrostatique** : (10.49)

$$\frac{1}{2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} = -\frac{1}{2} (\nabla \varphi) \cdot \mathbf{D} = \frac{1}{2} \varphi (\nabla \cdot \mathbf{D}) - \frac{1}{2} \nabla \cdot (\varphi \mathbf{D}) \quad (10.50)$$

- **Energie électrostatique** : intégrale de (10.50) sur  $V$  ainsi (10.51)

$$\frac{1}{2} \int_V dV (\mathbf{E} \cdot \mathbf{D}) = \frac{1}{2} \int_V dV \left( \varphi (\nabla \cdot \mathbf{D}) \right) - \frac{1}{2} \int_V dV \left( \nabla \cdot (\varphi \mathbf{D}) \right)$$

- **Loi de Gauss** : densité de charge électrique  $q$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = q \quad (10.52)$$

- **Champ électrique** : nul à l'intérieur d'un conducteur

$$\mathbf{E} = 0 \quad (\text{intérieur conducteur}) \quad (10.53)$$

- **Densité de charge électrique** : nul à l'intérieur d'un conducteur

$$q = 0 \quad (\text{intérieur conducteur}) \quad (10.54)$$

ce qui signifie que les charges électriques mobiles à l'échelle macroscopique se trouvent à la surface du conducteur.

- **Energie électrostatique** : (10.51) à l'intérieur du conducteur

$$\frac{1}{2} \int_{V_{\text{int}}} dV (\mathbf{E} \cdot \mathbf{D}) = 0$$

- **Densité de charge électrique** : nul à l'extérieur d'un conducteur

$$q = 0 \quad (\text{extérieur conducteur})$$

- **Energie électrostatique** : (10.51) à l'extérieur du conducteur

$$\frac{1}{2} \int_{V_{\text{ext}}} dV (\mathbf{E} \cdot \mathbf{D}) = -\frac{1}{2} \int_{V_{\text{ext}}} dV (\nabla \cdot (\varphi \mathbf{D}))$$

- **Loi de Gauss** : charge électrique à la surface  $Q$  (thm. de la divergence)

$$\int_{V_{\text{ext}}} dV \nabla \cdot \mathbf{D} = - \int_S d\mathbf{S} \cdot \mathbf{D} = Q \quad (10.55)$$

où le signe négatif est lié au fait que l'élément  $d\mathbf{S}$  est défini positif lorsqu'il est orienté vers l'extérieur du conducteur.

- **Potentiel électrostatique** : à la surface du conducteur

$$\varphi = \text{cste} \quad (\text{surface conducteur}) \quad (10.56)$$

- **Energie électrostatique** : (10.49) à l'extérieur du conducteur

$$\frac{1}{2} \int_{V_{\text{ext}}} dV (\mathbf{E} \cdot \mathbf{D}) = \frac{1}{2} Q \varphi \quad (10.58)$$

- **Energie interne** : intégrale de la densité d'énergie interne

$$U(S, \{N_A\}, Q) = \int_V dV u(s, \{n_A\}, \mathbf{D}) \quad (10.59)$$

- **Entropie et quantité de substance** :

$$S = \int_{V_{\text{int}}} dV s \quad \text{et} \quad N_A = \int_{V_{\text{int}}} dV n_A \quad (10.60)$$

- **Energie interne** : conducteur avec des champs électrostatiques isotropes

$$U(S, \{N_A\}, Q) = TS + \sum_{A=1}^r \mu_A N_A + \frac{1}{2} \varphi Q \quad (10.61)$$

- Différentielle de l'énergie interne :

$$dU(S, \{N_A\}, Q) = T dS + \sum_{A=1}^r \mu_A dN_A + \varphi dQ \quad (10.62)$$

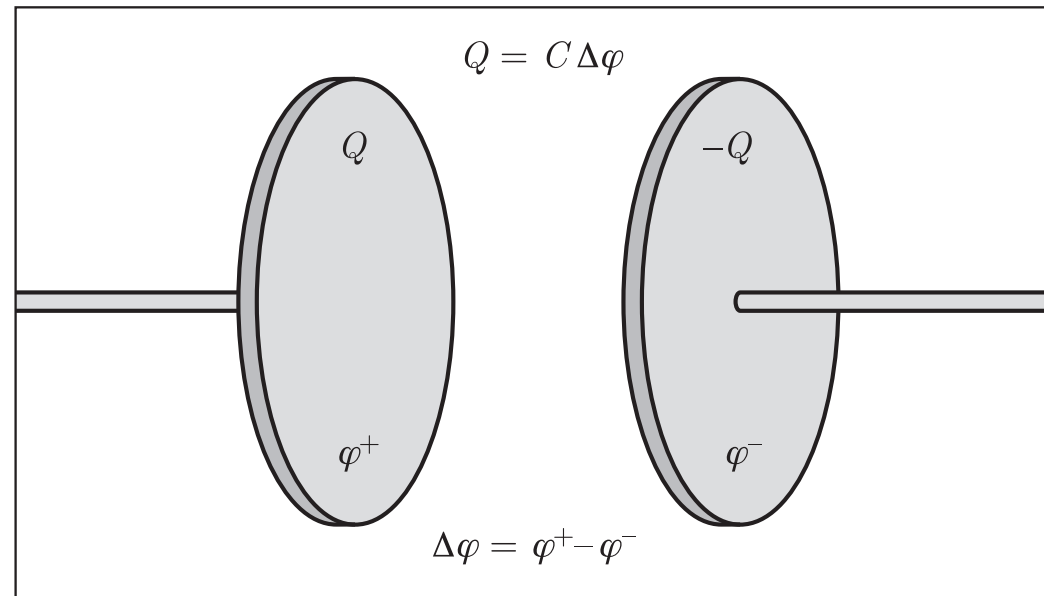
- **Enthalpie électrostatique** : transformation de Legendre de  $U$

$$\begin{aligned} H_e(S, \{N_A\}, \varphi) &= U - \frac{\partial U}{\partial Q} Q = U - \varphi Q \\ &= TS + \sum_{A=1}^r \mu_A N_A - \frac{1}{2} Q \varphi \end{aligned} \quad (10.63)$$

- Différentielle de l'enthalpie électrostatique :

$$dH_e(S, \{N_A\}, \varphi) = T dS + \sum_{A=1}^r \mu_A dN_A - Q d\varphi \quad (10.64)$$

- **Condensateur plan** : deux conducteurs plan séparés, de charge électrique égale et opposée qui génèrent une différence de potentiel électrostatique.



- **Charges électriques** :  $Q^+$  et  $Q^-$  égales et opposées

$$Q = Q^+ = -Q^- > 0 \quad (10.65)$$

- **Différence de potentiel électrostatique** :

$$\Delta \varphi = \varphi^+ - \varphi^- > 0 \quad (10.66)$$

- **Energie électrostatique** : condensateur plan

$$U(Q) = \frac{1}{2} (\varphi^+ Q^+ + \varphi^- Q^-) = \frac{1}{2} \Delta\varphi Q \quad (10.67)$$

- **Enthalpie électrostatique** : condensateur plan

$$H_e(\Delta\varphi) = -\frac{1}{2} (Q^+ \varphi^+ + Q^- \varphi^-) = -\frac{1}{2} Q \Delta\varphi \quad (10.68)$$

- **Capacité électrostatique** :  $C$  du condensateur plan (constante)

$$Q = C \Delta\varphi \quad (10.69)$$

- **Energie électrostatique** : condensateur plan

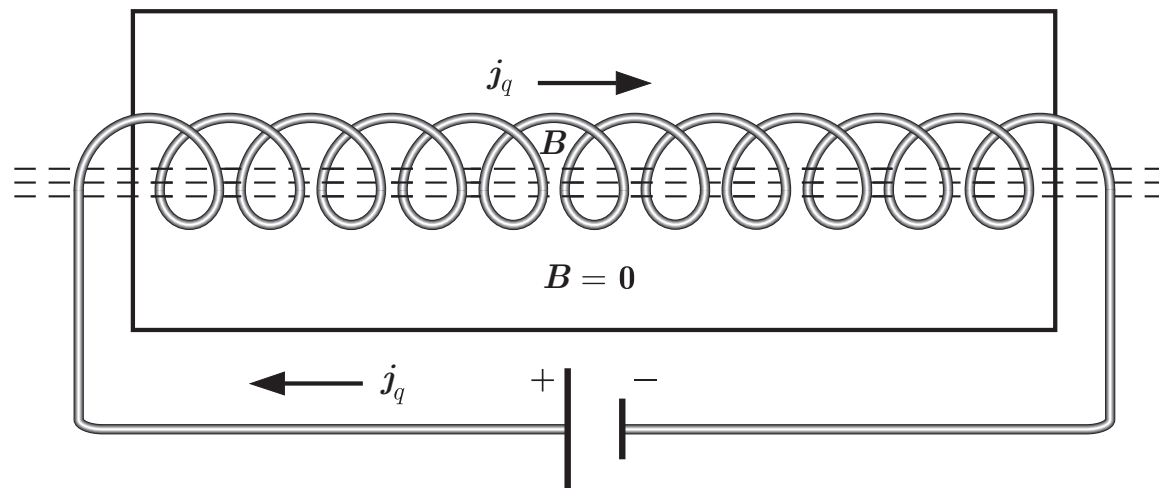
$$U(Q) = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} \quad (10.70)$$

- **Enthalpie électrostatique** : condensateur plan

$$H_e(\Delta\varphi) = -\frac{1}{2} C \Delta\varphi^2 \quad (10.71)$$



- **Conducteur** : bobine conductrice dans une enceinte à vide de volume  $V$  parcourue par une densité de courant électrique  $\vec{j}_q$  stationnaire générée à l'extérieur de l'enceinte.
- **Hypothèse** : la bobine est suffisamment longue par rapport au nombre de spires qu'elle contient pour générer un champ d'induction magnétique  $\vec{B}$  uniforme à l'intérieur. Le champ magnétique d'induction magnétique est négligeable à l'extérieur de la bobine.



- **Intégration** : sur le plan mathématique, on va intégrer la densité d'énergie magnétostatique sur le volume intérieur  $V_{\text{int}}$  de la bobine en utilisant le théorème de la divergence pour remplacer l'intégrale sur le volume par une intégrale sur la surface de la bobine.

- **Magnétostatique** : le courant électrique dans la bobine est stationnaire, ce qui signifie qu'il n'y a pas d'induction électromagnétique. Par conséquent, le système ne génère pas de variation de champ électrique.
- **Densité d'énergie interne** : magnétostatique d'une bobine

$$u(s, \{n_A\}, \mathbf{B}) = Ts + \sum_{A=1}^r \mu_A n_A + \frac{B^2}{2\mu} \quad (10.72)$$

- **Relation constitutive magnétique** : homogène et isotrope

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \quad (10.43)$$

- **Densité d'énergie interne** : (10.43) dans (10.72)

$$u(s, \{n_A\}, \mathbf{B}) = Ts + \sum_{A=1}^r \mu_A n_A + \frac{1}{2} \mathbf{H} \cdot \mathbf{B} \quad (10.73)$$

- **Champ d'induction magnétique** : rotationnel du potentiel magnétostatique  $\mathbf{A}$

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (10.74)$$

- **Densité d'énergie magnétostatique :** (10.74)

$$\frac{1}{2} \mathbf{H} \cdot \mathbf{B} = \frac{1}{2} \mathbf{H} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = \frac{1}{2} (\nabla \times \mathbf{H}) \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{2} \nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{H}) \quad (10.75)$$

- **Energie magnétostatique :** intégrale de (10.75) sur  $V$  donne (10.76)

$$\frac{1}{2} \int_V dV (\mathbf{H} \cdot \mathbf{B}) = \frac{1}{2} \int_V dV \left( (\nabla \times \mathbf{H}) \cdot \mathbf{A} \right) + \frac{1}{2} \int_V dV \left( \nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{H}) \right)$$

- **Loi d'Ampère :** densité de charge courant électrique  $\mathbf{j}_q$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j}_q \quad (10.77)$$

- **Champ d'induction magnétique :** nul à l'extérieur de la bobine

$$\mathbf{B} = 0 \quad (\text{extérieur bobine}) \quad (10.78)$$

- **Energie magnétostatique :** (10.76) à l'extérieur de la bobine

$$\frac{1}{2} \int_{V_{\text{ext}}} dV (\mathbf{H} \cdot \mathbf{B}) = 0$$

- **Théorème de la divergence** : où  $S$  est la surface de la bobine

$$\int_{V_{\text{int}}} dV \left( \nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{H}) \right) = \int_S d\mathbf{S} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{H}) = 0$$

car les vecteurs  $d\mathbf{S}$  et  $\mathbf{A}$  sont colinéaires.

- **Energie magnétostatique** : (10.76) à l'intérieur de la bobine

$$\frac{1}{2} \int_{V_{\text{int}}} dV (\mathbf{H} \cdot \mathbf{B}) = \frac{1}{2} \int_{V_{\text{int}}} dV \left( (\nabla \times \mathbf{H}) \cdot \mathbf{A} \right)$$

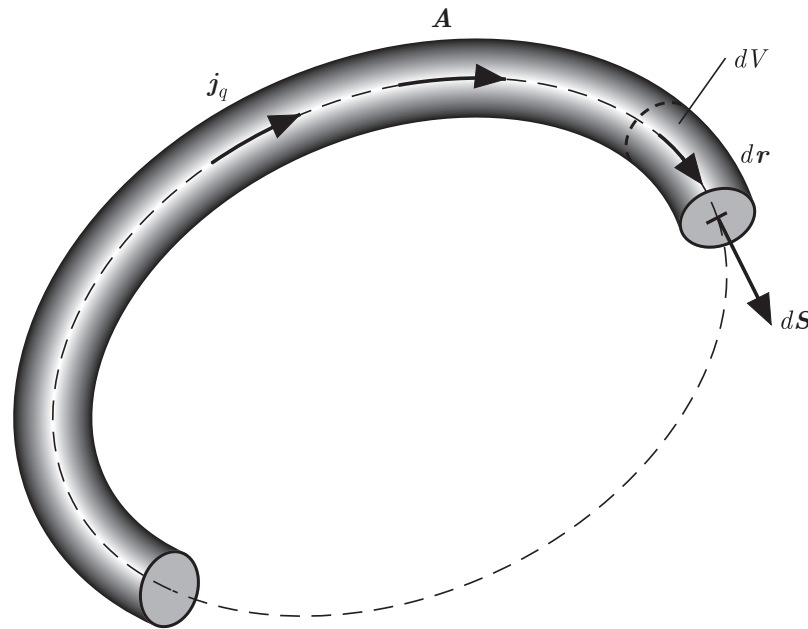
- **Energie magnétostatique** : (10.77) à l'intérieur de la bobine

$$\frac{1}{2} \int_{V_{\text{int}}} dV (\mathbf{H} \cdot \mathbf{B}) = \frac{1}{2} \int_{V_{\text{int}}} dV (\mathbf{j}_q \cdot \mathbf{A}) \quad (10.79)$$

L'intégrale est non nulle uniquement dans le volume occupé par les spires parcourues par une densité de courant électrique  $\mathbf{j}_q$  constante.

- **Volume infinitésimal d'une spire** :

$$dV = d\mathbf{S} \cdot d\mathbf{r} \quad (10.80)$$



- **Energie magnétostatique** : (10.80) dans (10.79) dans la bobine

$$\frac{1}{2} \int_{V_{\text{int}}} dV (\mathbf{H} \cdot \mathbf{B}) = \frac{1}{2} \int_S d\mathbf{S} \cdot \mathbf{j}_q \int_C d\mathbf{r} \cdot \mathbf{A} \quad (10.81)$$

- **Courant électrique** : qui parcourt les spires de la bobine

$$I = \int_S d\mathbf{S} \cdot \mathbf{j}_q \quad (10.82)$$

- **Flux magnétostatique** : qui traverse l'ensemble de la bobine

$$\Phi = \int_C d\mathbf{r} \cdot \mathbf{A} \quad (10.83)$$

- **Energie magnétostatique** : (10.82) et (10.83) dans (10.79)

$$\frac{1}{2} \int_{V_{\text{int}}} dV (\mathbf{H} \cdot \mathbf{B}) = \frac{1}{2} I \Phi \quad (10.85)$$

- **Energie interne** : intégrale de la densité d'énergie interne

$$U(S, \{N_A\}, \Phi) = \int_V dV u(s, \{n_A\}, \mathbf{B}) \quad (10.86)$$

- **Energie interne** : bobine avec des champs magnétostatiques

$$U(S, \{N_A\}, \Phi) = TS + \sum_{A=1}^r \mu_A N_A + \frac{1}{2} I \Phi \quad (10.87)$$

- **Différentielle de l'énergie interne** :

$$dU(S, \{N_A\}, \Phi) = T dS + \sum_{A=1}^r \mu_A dN_A + I d\Phi \quad (10.88)$$

- **Enthalpie magnétostatique** : transformation de Legendre de  $U$

$$\begin{aligned}
 H_m(S, \{N_A\}, I) &= U - \frac{\partial U}{\partial \Phi} \Phi = U - I \Phi \\
 &= TS + \sum_{A=1}^r \mu_A N_A - \frac{1}{2} \Phi I
 \end{aligned}
 \tag{10.89}$$

- **Différentielle de l'enthalpie magnétostatique** :

$$dH_m(S, \{N_A\}, I) = T dS + \sum_{A=1}^r \mu_A dN_A - \Phi dI \tag{10.90}$$

- **Energie magnétostatique** : bobine

$$U(\Phi) = \frac{1}{2} I \Phi \tag{10.91}$$

- **Enthalpie magnétostatique** : bobine

$$H_m(I) = -\frac{1}{2} \Phi I \tag{10.92}$$

- **Inductance magnétostatique** :  $L$  de la bobine (constante)

$$\Phi = L I \quad (10.93)$$

- **Energie magnétostatique** : bobine

$$U(\Phi) = \frac{1}{2} \frac{\Phi^2}{L} \quad (10.94)$$

- **Enthalpie magnétostatique** : bobine

$$H_m(I) = -\frac{1}{2} L I^2 \quad (10.95)$$



### 10.4 Conducteur et champs électromagnétiques extérieurs

10.4.1 Conducteur et champs électrostatiques extérieurs

10.4.2 Conducteur et champs magnétostatiques extérieurs

- **Système** : un conducteur électrique homogène de charge électrique  $Q$  est enfermé et maintenu fixe dans une enceinte à vide électriquement neutre soumise à un champ électrique extérieur  $\mathbf{E}$  uniforme et constant.
- **Hypothèse** : les champs électrostatiques extérieurs sont suffisamment grands pour que les champs électrostatiques générés dans le système puissent être négligés.
- **Conséquence** : le champ électrique extérieur  $\mathbf{E}$  est alors indépendant du champ de déplacement électrique  $\mathbf{D}$ .
- **Densité d'énergie interne** : conducteur avec champ extérieur  $\mathbf{E}$

$$u(s, \{n_A\}, \mathbf{D}) = Ts + \sum_{A=1}^r \mu_A n_A + \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} \quad (10.96)$$

- **Energie interne** : conducteur de charge  $Q$  avec champ extérieur  $\varphi$

$$U(S, \{N_A\}, Q) = TS + \sum_{A=1}^r \mu_A N_A + Q\varphi \quad (10.97)$$

- **Charge électrique** : conducteur constitué de  $r$  substances chimiques  $A$

$$Q = \sum_{A=1}^r q_A N_A \quad (10.98)$$

où  $q_A$  est la charge électrique d'une mole de substance  $A$ .

- **Potentiel électrochimique** : substance chimique  $A$

$$\bar{\mu}_A = \mu_A + q_A \varphi \quad (10.100)$$

- **Energie interne** : (10.98) et (10.100) dans (10.97)

$$U(S, \{N_A\}, Q) = TS + \sum_{A=1}^r \bar{\mu}_A N_A \quad (10.99)$$

- **Energie électrostatique** : champ extérieur  $\varphi$

$$U(Q) = Q \Delta\varphi = C \Delta\varphi^2 = \frac{Q^2}{C} \quad (10.101)$$

- **Système** : une bobine conductrice homogène parcourue par un courant électrique  $I$  est enfermée et maintenue fixe dans une enceinte à vide électriquement neutre soumise à un champ magnétique extérieur  $\mathbf{H}$  uniforme et constant.
- **Hypothèse** : les champs magnétostatiques extérieurs sont suffisamment grands pour que les champs magnétostatiques générés dans le système puissent être négligés.
- **Conséquence** : le champ magnétique extérieur  $\mathbf{H}$  est alors indépendant du champ d'induction magnétique  $\mathbf{B}$ .
- **Densité d'énergie interne** : bobine avec champ extérieur  $\mathbf{H}$

$$u(s, \{n_A\}, \mathbf{B}) = Ts + \sum_{A=1}^r \mu_A n_A + \mathbf{H} \cdot \mathbf{B} \quad (10.102)$$

- **Energie interne** : bobine avec flux magnétique extérieur  $\Phi$

$$U(S, \{N_A\}, Q) = TS + \sum_{A=1}^r \mu_A N_A + I \Phi \quad (10.103)$$

- **Courant électrique** : bobine constituée de  $r$  substances chimiques  $A$

$$I = \sum_{A=1}^r I_A N_A \quad (10.104)$$

où  $I_A$  est le courant électrique d'une mole de substance  $A$ .

- **Potentiel magnétochimique** : substance chimique  $A$

$$\bar{\mu}_A = \mu_A + I_A \Phi \quad (10.106)$$

- **Energie interne** : (10.104) et (10.106) dans (10.103)

$$U(S, \{N_A\}, \Phi) = TS + \sum_{A=1}^r \bar{\mu}_A N_A \quad (10.105)$$

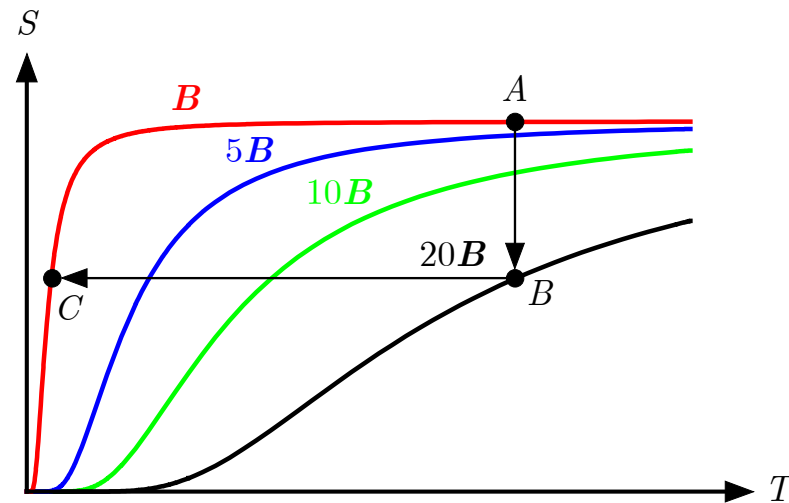
- **Energie magnétostatique** : flux extérieur  $\Phi$

$$U(\Phi) = \Phi I = L I^2 = \frac{\Phi^2}{L} \quad (10.107)$$

### 10.5 Applications

#### 10.5.1 Désaimantation adiabatique

- **Désaimantation adiabatique** : la désaimantation adiabatique est souvent utilisée pour refroidir des échantillons à de très basses températures.



- **Système** : matériau constitué d'une seule substance chimique  $A$  paramagnétique, uniforme, électriquement neutre en présence d'un champ d'induction magnétique  $B$ .
- **Principe de fonctionnement** : le système magnétique est amené à l'état  $A$ . Il est en contact avec un bain thermique. En maintenant ce contact, un champ d'induction magnétique  $B$  est appliqué au système pour l'amener dans l'état  $B$ . Le contact avec le bain thermique est alors enlevé et le champ d'induction magnétique est annulé ce qui amène le système dans l'état  $C$ . La fonction  $S(T, B)$  prédit une chute de température.

- Différentielle de la densité d'énergie interne : (10.15)

$$du(s, M) = Tds + \mathbf{B} \cdot d\mathbf{M} \quad (10.108)$$

- **Loi de Curie** : matériau paramagnétique

$$\mathbf{M} = \frac{C}{\mu_0 T} \mathbf{B} \quad (10.109)$$

où  $C > 0$  est la constante de Curie.

- **Démarche** : pour analyser la désaimantation adiabatique, on examine les deux processus suivants :
  - 1 **Processus isotherme** : ( $A \rightarrow B$ ) on détermine la variation de la densité d'entropie  $s$  lorsque le champ d'induction magnétique  $\mathbf{B}$  croît alors que la température  $T$  reste constante (i.e.  $T = T_0$ ).
  - 2 **Processus adiabatique** : ( $B \rightarrow C$ ) on détermine la variation de température  $T$  quand le champ d'induction magnétique  $\mathbf{B}$  décroît alors que la densité d'entropie  $s$  reste constante (i.e.  $s = s_0$ ).



**1 Processus isotherme :  $A \rightarrow B$** 

- Différentielle de la densité d'entropie :  $s(T, M)$

$$ds(T, M) = \frac{\partial s}{\partial T} dT + \frac{\partial s}{\partial M} \cdot dM \quad (10.113)$$

- Différentielle de la densité d'énergie libre : (10.23)

$$df(T, M) = -s dT + \mathbf{B} \cdot d\mathbf{M} \quad (10.110)$$

- Théorème de Schwarz : densité d'énergie libre  $f(T, M)$

$$\frac{\partial}{\partial M} \left( \frac{\partial f}{\partial T} \right) = \frac{\partial}{\partial T} \left( \frac{\partial f}{\partial M} \right) \quad (10.111)$$

- Relation de Maxwell : (10.109) et (10.103) dans (10.111)

$$-\frac{\partial s}{\partial M} = \frac{\partial B}{\partial T} = \frac{\mu_0}{C} M \quad (10.112)$$

- **Différentielle de la densité d'entropie** : (10.112) dans (10.113) à température constante  $T = T_0$

$$ds(T_0, \mathbf{M}) = -\frac{\mu_0}{C} \mathbf{M} \cdot d\mathbf{M} \quad (10.114)$$

- **Densité d'entropie** : intégrale de (10.114) de  $s_i(T_0, \mathbf{M}_i)$  à  $s_f(T_0, \mathbf{M}_f)$

$$s_f(T_0, \mathbf{M}_f) - s_i(T_0, \mathbf{M}_i) = -\frac{\mu_0}{2C} (\mathbf{M}_f^2 - \mathbf{M}_i^2) \quad (10.115)$$

- **Densité d'entropie** : (10.109) dans (10.115) où  $T = T_0$

$$s_f(T_0, \mathbf{B}_f) - s_i(T_0, \mathbf{B}_i) = -\frac{C}{2\mu_0 T_0^2} (\mathbf{B}_f^2 - \mathbf{B}_i^2) \quad (10.116)$$

- **Processus isotherme** : la densité d'entropie  $s$  décroît (i.e.  $s_f < s_i$ ) lorsque la norme du champ d'induction magnétique  $\|\mathbf{B}\|$  croît (i.e.  $\|\mathbf{B}_f\| > \|\mathbf{B}_i\|$ ).

2 **Processus adiabatique** :  $B \rightarrow C$

- **Identité cyclique de dérivées partielles** :  $s(T, B)$ ,  $T(s, B)$  et  $B(s, T)$

$$\frac{\partial s}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial B} \cdot \frac{\partial B}{\partial s} = -1 \quad \text{ainsi} \quad \frac{\partial T}{\partial B} = - \frac{\partial T}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial B} \quad (10.117)$$

- **Différentielle de la densité d'enthalpie magnétique libre** :

$$dg_m(T, B) = -s dT - \mathbf{M} \cdot d\mathbf{B} \quad (10.118)$$

- **Théorème de Schwarz** :  $g_m(T, B)$

$$\frac{\partial}{\partial B} \left( \frac{\partial g_m}{\partial T} \right) = \frac{\partial}{\partial T} \left( \frac{\partial g_m}{\partial B} \right) \quad (10.119)$$

- **Relation de Maxwell** : (10.109) dans (10.119)

$$-\frac{\partial s}{\partial B} = -\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial T} = \frac{C \mathbf{B}^2}{\mu_0 T^2} \quad (10.120)$$

- **Capacité thermique** : à aimantation constante

$$c_M(T, M) = \left. \frac{\partial u}{\partial T} \right|_M = T \frac{\partial s(T, M)}{\partial T} \quad (10.121)$$

- **Capacité thermique** : à aimantation constante

$$c_M (T, M) = T \frac{\partial s (T, M)}{\partial T} \quad (10.121)$$

- **Relation de Maxwell** :

$$\frac{\partial s}{\partial M} = - \frac{\mu_0}{C} M \quad (10.112)$$

- **Chaleur infinitésimale** : (10.121) et (10.112)

$$T ds (T, M) = T \frac{\partial s}{\partial T} dT + T \frac{\partial s}{\partial M} \cdot dM = c_M dT - \mathbf{B} \cdot d\mathbf{M} \quad (10.122)$$

- **Différentielle de la densité d'énergie interne** :

$$du (s, M) = T ds + \mathbf{B} \cdot d\mathbf{M} \quad (10.108)$$

- **Différentielle de la densité d'énergie interne** : (10.121) dans (10.108)

$$du = c_M dT \quad (10.123)$$

- **Densité de chaleur spécifique** : à basse température  $T$

$$c_M(T) = \frac{a}{\mu_0 T^2} \quad (10.124)$$

où  $a > 0$ . Ce résultat requiert une démarche statistique.

- **Densité d'enthalpie magnétique** :

$$h_m(s, \mathbf{B}) = u - \mathbf{B} \cdot \mathbf{M} \quad (10.26)$$

- **Dérivée thermique** : de la densité d'enthalpie magnétique

$$\left. \frac{\partial h_m}{\partial T} \right|_B = \left. \frac{\partial u}{\partial T} \right|_M - \frac{\partial}{\partial T} (\mathbf{M} \cdot \mathbf{B}) = \left. \frac{\partial u}{\partial T} \right|_M - \frac{\partial}{\partial T} \left( \frac{C \mathbf{B}^2}{\mu_0 T} \right) \quad (10.125)$$

- **Capacité thermique** : à champ d'induction magnétique constant

$$c_B = \left. \frac{\partial h_m}{\partial T} \right|_B = T \frac{\partial s(T, \mathbf{B})}{\partial T} \quad (10.126)$$

- **Relation de Mayer** : paramagnétique (10.121) et (10.126) dans (10.125)

$$c_B - c_M = \frac{C \mathbf{B}^2}{\mu_0 T^2} \quad (10.127)$$

- **Capacité thermique** : à champ  $B$  constant (10.124) dans (10.127)

$$c_B = \frac{a + C B^2}{\mu_0 T^2}$$

- **Dérivée thermique** : de l'entropie (10.126)

$$\frac{\partial s}{\partial T} = \frac{c_B}{T} = \frac{a + C B^2}{\mu_0 T^3} \quad \text{ainsi} \quad \frac{\partial T}{\partial s} = \frac{\mu_0 T^3}{a + C B^2} \quad (10.128)$$

- **Dérivée magnétique** : de la temp. (10.120) et (10.128) dans (10.117)

$$\frac{\partial T}{\partial B} = \frac{C T B}{a + C B^2} \quad \text{ainsi} \quad \frac{dT}{T} = \frac{1}{2} \frac{d(a + C B^2)}{a + C B^2} \quad (10.129)$$

**Rapport des températures** : intégrale de  $T_i(s_0, B_i)$  à  $T_f(s_0, B_f)$

$$\frac{T_f(s_0, B_f)}{T_i(s_0, B_i)} = \sqrt{\frac{a + C B_f^2}{a + C B_i^2}} \quad (10.130)$$

- **Processus adiabatique** : la température  $T$  décroît (i.e.  $T_f < T_i$ ) lorsque la norme du champ d'induction mag.  $\|B\|$  décroît (i.e.  $\|B_f\| < \|B_i\|$ ).